Colle du 20/04 - Sujet 1
Dénombrement et probabilités

Question de cours. Montrer que si B n'est pas négligeable alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.

Exercice 1. Un joueur de badminton participe à un championnat à élimination directe. Il doit gagner n matchs pour remporter le tournoi. Au match numéro k, la probabilité qu'il gagne sachant qu'il a gagné tous ses précédents match, est de $\frac{1}{k}$. S'il perd un match il est éliminé du championnat.

1. Calculer la probabilité qu'il remporte le tournoi.
2. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note B_k : le joueur est éliminé lors du match k. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_k)$.

Exercice 2. On construit une main en piochant sans ordre 8 cartes dans un jeu de 52 cartes.

1. Donner le nombre de mains.
2. Calculer le nombre de mains avec au moins un roi.
3. Calculer le nombre de mains avec exactement 3 trèfles et une dame.
4. Calculer le nombre de mains avec exactement 3 trèfles ou avec exactement une dame.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 20/04 - Sujet 2
Dénombrement et probabilités

Question de cours. Déterminer le nombre de parties de E.

Exercice 1. Une roue permet de donner aléatoirement un nombre entre 1 et n. Si l'on obtient le numéro i, on pioche alors i fois avec remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.

1. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu que des boules blanches.
2. On suppose $n = 6$. Déterminer la probabilité d'avoir pioché le numéro 3 sachant que l'on a obtenu que des boules blanches.
3. On reprend $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu exactement 3 boules blanches.

Exercice 2.

1. Calculer le nombre de façons de ranger 39 étudiants en 13 groupes de colles numérotés de 1 à 13.
2. Soit N le nombre de façons de ranger 39 étudiants lorsque les groupes ne sont plus numérotés. A l'aide de la question précédente, déterminer N.

Colle du 20/04 - Sujet 3
Dénombrement et probabilités

Question de cours. Démontrer le théorème d'approximation de Weierstrass : énoncer dans le cas continue et démonstration dans le cas lipschitzien.

Exercice 1. On lance $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ fois une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$. On note

A : « on obtient au moins une fois pile et au moins une fois face »
B : « on obtient au plus une fois face »

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que A et B soient indépendants.

Exercice 2. Soit $E = [\![0;n]\!]$. Pour tout $(p,k) \in [\![0;n]\!]^2$, on pose $\mathscr{A}_p = \{\, A \in \mathscr{P}(E) \mid \mathrm{Card}\,(A) = p \,\}$ et $\mathscr{B}_{p,k} = \{\, A \in \mathscr{P}(E) \mid \mathrm{Card}\,(A) = p \text{ et } \max(A) = k \,\}$.

1. Calculer $\mathrm{Card}\,(\mathscr{A}_p)$.
2. Calculer $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_{p,k})$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.